

Modellierung von Kennlinienhysteresen

Roland Büchi, Zürcher Hochschule Winterthur

Bei der Modellierung von Systemen werden gewöhnlich Differentialgleichungen hergeleitet, welche auf physikalischen Grundlagen beruhen. Da es sich bei Kennlinienhysteresen um nichtlineare Effekte handelt, wird bei deren Modellierung ein anderer Weg beschritten. Es wird eine Messung als Grundlage für eine Modellierung herangezogen. Somit beruht das Modell nicht auf den Ursachen (wie beim Modell mit Differentialgleichungen), sondern auf Symptomen. Der Vorteil dieser von der Physik losgelösten Methode liegt darin, dass sie auf viele technische Bereiche angewendet werden kann.

Usually, mathematical models of systems are based on differential equations using physical effects. Characteristic lines of hysteresis curves are non-linear, which causes the need of different modelling methods. A measurement of the characteristic line is used as base of the model. This means, that the mathematical model is not established by the cause, but by the symptoms of non-linearity. The advantage of this method detached from physics is, that it is usable for a huge number of technical topics.

1. Einleitung

Währendem bei einer auf der Physik beruhenden Modellierung nach dem Grund für das Systemverhalten gesucht wird, werden bei einer Modellierung nach einer gegebenen Messung nur die Symptome modelliert. Der vorliegende Beitrag inklusive Rechenbeispiel mit MATLAB behandelt die Vorgehensweise bei der Modellierung von Kennlinienhysteresen. Die Modellierungsmethode wird anhand eines Multilayer-Piezoaktuators verifiziert.

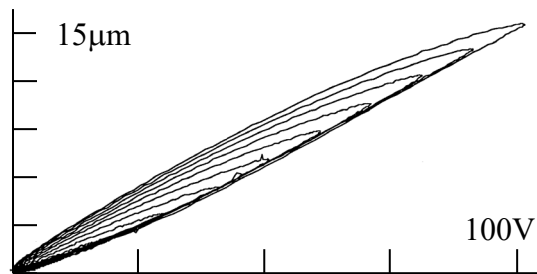


Fig.1.: Weg-/Spannungsdiagramm eines Piezoelementes

In Fig. 1 wird das mittels Laser Interferometrie gemessene Weg-/Spannungsdiagramm eines Multilayer-Piezoelementes dargestellt. Es zeigt, dass die Ausdehnung bei einer angelegten Spannung von 50V je nach der Vorgeschichte zwischen $6\mu\text{m}$ und $10\mu\text{m}$ liegen kann. Im folgenden wird gezeigt, wie es möglich ist, eine solche Hysterese mit einem mathematischen Modell nachzubilden. Diese wird dabei als statische Nichtlinearität behandelt. Statisch heisst, dass die Dynamik des Eingangssignals keinen Einfluss auf die Eigenschaften und das Verhalten der Hysterese hat. Diese Annahme ist korrekt für quasistatische Bewegungen, für Bewegungen also, deren

Dynamik weit unterhalb der Dynamik des Piezoelementes liegt. Ist diese Bedingung jedoch nicht erfüllt, so sind die folgenden Ausführungen nicht mehr gültig.

Statische Hysteresen können in zwei verschiedene Klassen aufgeteilt werden [Mayergoz 91]: Es gibt solche mit lokalem Speicher (Fig. 2a) und solche mit nichtlokalem Speicher (Fig. 2b).

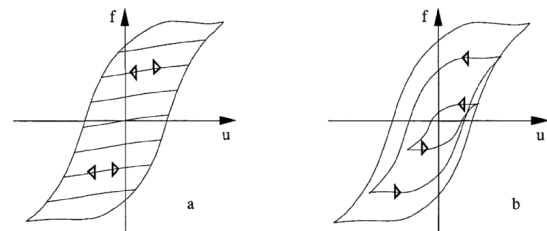


Fig.2.: Hysteresen mit lokalem (a) und nichtlokalem Speicher (b)

Hysteresen mit lokalem Speicher sind wie folgt charakterisiert: das Ausgangssignal $f(t)$; $t = t_0$ und das Eingangssignal $u(t)$; $t > t_0$ bestimmen zusammen das Ausgangssignal $f(t)$; $t > t_0$. Das Ausgangssignal $f(t)$ ist also nicht nur vom Eingangssignal, sondern auch von einem sogenannten lokalen Speicher, dem Ausgangssignal $f(t)$; $t = t_0$ abhängig. Bei Hysteresen mit nichtlokalem Speicher wird das Verhalten noch etwas komplizierter; hier ist das Ausgangssignal einerseits abhängig vom aktuellen Eingangssignal $f(t)$ und andererseits auch von vergangenen Eingangssignalen, das heisst, von lokalen Maxima und Minima. Einfache Messungen zeigen, dass bei Piezoelementen lokale Maxima und Minima gespeichert werden müssen. Somit gehören sie zu der zweiten Kategorie, zu den Hysteresen mit nichtlokalem Speicher. In der Folge wird eine Methodik entwickelt, um solche Hysteresen zu behandeln.

2. Definition des Preisach'schen Hysterese-modells

Der Ursprung des an dieser Stelle diskutierten Hysterese-modells geht zurück auf F. Preisach [Preisach 35]. Gegeben sei ein unendlich grosser Satz von elementaren Hystereseoperatoren $\gamma_{\alpha\beta}$ (Fig. 3).

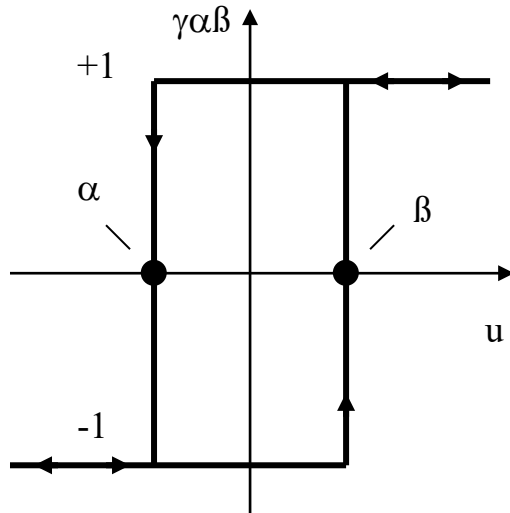


Fig. 3.: Elementarer Hystereseoperator $\gamma_{\alpha\beta}$

Diese können als Rechteckschleife aufgefasst werden, wobei jeweils α die ansteigende und β die abfallende Flanke darstellt. Es wird angenommen, dass $\alpha \geq \beta$. Dies ist vom physikalischen Standpunkt aus gerechtfertigt. Die Ausgänge dieser Operatoren können nur entweder den Wert +1 oder -1 annehmen. Alle Operatoren $\gamma_{\alpha\beta}$ sind mit einer Funktion $\mu(\alpha, \beta)$ gewichtet. Diese Gewichtsfunktion stellt den aus Messwerten ermittelten Kurvenverlauf der Hysterese dar und wird weiter unten behandelt. Die Berechnung der Ausgangsfunktion geschieht mit

$$f(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \cdot \gamma_{\alpha, \beta} \cdot u(t) d\alpha d\beta \quad (1)$$

3. Speicherung und Auslöschung von lokalen Minima und Maxima

Die mathematische Beschreibung des Preisach'schen Hysterese-modells vereinfacht sich durch die geometrische Interpretation. Diese basiert auf der folgenden Begebenheit: es gibt einen direkten Zusammenhang zwischen den Hystereseoperatoren $\gamma_{\alpha\beta}$ und den Punkten (β/α) einer Halbebene $\alpha \geq \beta$. Jeder Punkt dieser Halbebene entspricht genau dem Hystereseoperator mit α und β als "Aufwärts-" und "Abwärtsumschaltunkt". Die Gewichtsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ sagt schliesslich aus, wie stark der Hystereseoperator $\gamma_{\alpha\beta}$ gewichtet

wird. Formel (1) zeigt, dass der Ausgang der Hysterese-funktion einer Doppelintegration nach α und β entspricht. Bei der geometrischen Interpretation entspricht also der Maximalwert des Ausgangs f der unter der Halbebene $\alpha \geq \beta$ aufgespannten Fläche. Während der Bewegung wird unterschieden, ob die Ableitung des Eingangssignals, im Fall der Piezoelemente die Eingangsspannung, positiv (auf) oder negativ (ab) ist. Die lokalen Minima und Maxima sitzen nun auf den Punkten, wo die Ableitungen des Eingangssignales null sind: Minima treten auf beim Wechsel von negativ auf positiv, Maxima beim Wechsel von positiv auf negativ. Da Multilayer-Piezoelemente nur mit positiven Spannungen angesteuert werden, ist die interessierende Fläche der Halbebene $\alpha \geq \beta$ nur $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$. Um die Speicherung zu beschreiben, wird ein mögliches Szenario nach Fig. 4 durchgespielt:

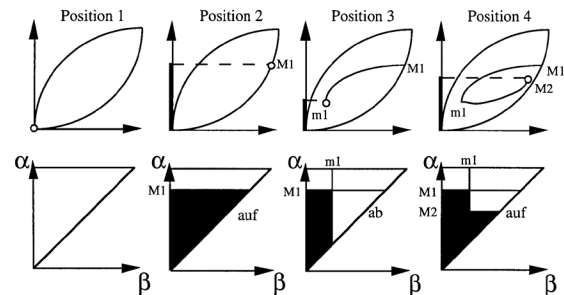


Fig. 4.: Speicherung von lokalen Minima und Maxima

Position 1 ist die Initialposition. Es gibt keine Spannung, welche an das Piezoelement angelegt ist, die Ausdehnung ist null. Bei Position 2 wird das Eingangssignal stetig erhöht, bis ein Punkt M_1 erreicht ist. Der Inhalt der aufgespannten Fläche entspricht dem Ausgang der Piezohysterese. Es gilt zu beachten, dass sie während dieser Phase (auf) von einer Geraden abgeschlossen wird, welche durch M_1 geht und parallel zur β -Achse verläuft. Bei ansteigenden Eingangssignalen entscheidet ja der α -Wert, wann die Hystereseoperatoren auf positiv wechseln. Für Position 3 wird das Eingangssignal von M_1 aus startend wieder stetig verkleinert, bis m_1 erreicht ist. Bei der Betrachtung des $\alpha \geq \beta$ -Diagrammes kann festgestellt werden, dass die aufgespannte Fläche während dieser Phase (ab) jetzt von einer Geraden durch m_1 parallel zur α -Achse abgeschlossen wird. Analog entscheidet hier der β -Wert, wann die Hystereseoperatoren auf negativ wechseln. Wie ebenfalls aus dem $\alpha \geq \beta$ -Diagramm ersichtlich ist, wird das lokale Maximum M_1 gespeichert. Bei Position 4 wird das Eingangssignal nun erneut stetig erhöht, bis ein Punkt M_2 erreicht ist. Die aufgespannte Fläche wird wieder durch eine Gerade parallel zur β -Achse begrenzt. Es fällt auf, dass die Speicherung der Maxima und Minima zu einer "Treppenfunktion" geführt hat, welche alle nötige Information enthält.

Es wurde oben gezeigt, wie lokale Minima und Maxima gespeichert werden. Sofort taucht jetzt die Frage auf, ob es nötig ist, alle Minima und Maxima der Vergangenheit zu speichern, oder ob diese unter bestimmten Umständen auch gelöscht werden können. Um Klarheit darüber zu erhalten, soll Fig. 5 genauer betrachtet werden.

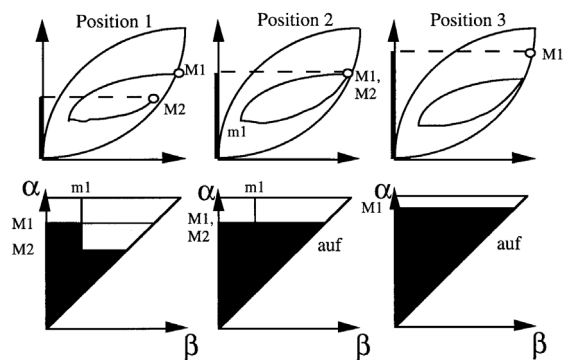


Fig. 5.: Auslöschung von lokalen Maxima und Minima

Position 1 ist genau gleich wie Position 4 Fig. 4. Wenn das Eingangssignal von M2 ausgehend stetig erhöht wird, bis M1 erreicht wird, dann gilt $M1 = M2$ (Position 2). Wenn es nun weiter erhöht wird, wie Position 3 zeigt, dann verschwindet der gespeicherte Loop, welcher das lokale Maximum M1 und das lokale Minimum m1 enthält. Das heisst, wenn ein altes Maximum überschritten oder ein altes Minimum unterschritten wird, dann verschwindet der gespeicherte Loop. Auch aus dem $\alpha \geq \beta$ -Diagramm ist dies ersichtlich: währenddem in Position 1 noch eine "Treppenfunktion" existiert, so ist diese in Position 3 nicht mehr vorhanden. Es ist nur noch das neue lokale Maximum M1 gespeichert.

4. Die Gewichtsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$

Bis hierher wurde eine homogen verteilte $\alpha \geq \beta$ -Ebene angenommen. Dies ist natürlich nicht der Fall bei der Behandlung einer realen Piezohysterese. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie aus einer Messung die Gewichtsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ abgeleitet werden kann.

Gegeben sei eine einfache Hysterese, wie sie in Fig. 6 gezeigt wird. Um die Gewichtsfunktion zu finden, muss sie gleich ausgemessen werden, wie die Piezohysterese in Fig. 1. Es wird also beim Punkt (0/0) gestartet. Zuerst wird der Eingang stetig erhöht, bis Punkt (4/4) erreicht wird. Danach wird er wieder bis zum Startpunkt (0/0) verkleinert.

Da hier diskrete Punkte ausgemessen werden, wird die $\alpha \geq \beta$ -Ebene in kleine Quadrate unterteilt. Die Ausgangswerte des grössten Loops (4, 3.5, 3, 2, 0) werden nun in die oberste Reihe der Flächenfunktion $F(\alpha, \beta)$ geschrieben. Auf diese Weise werden alle Loops ausgemessen und deren

Werte in die entsprechende Reihe geschrieben (Fig. 7).

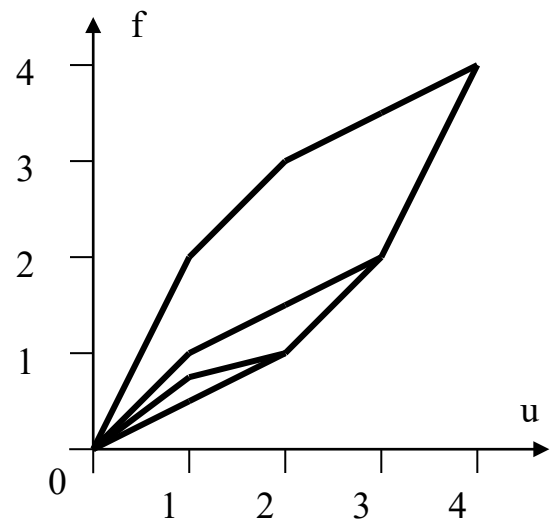


Fig. 6.: Beispiel einer Hysterese

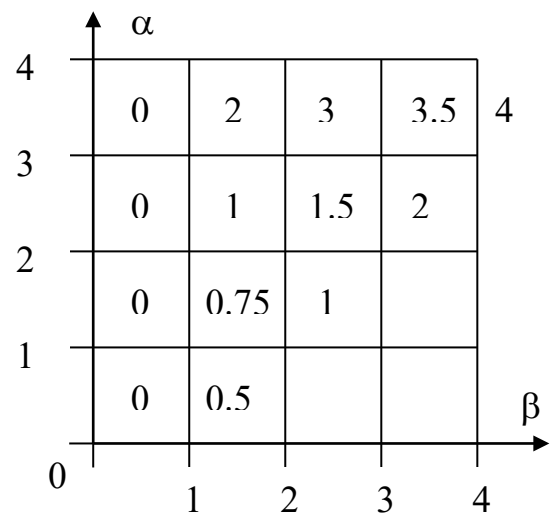


Fig. 7.: $F(\alpha, \beta)$

Um die Gewichtsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ zu erhalten, muss die Flächenfunktion $F(\alpha, \beta)$ jetzt noch nach α und β abgeleitet werden, wie Fig. 8 zeigt. Man kann dies im Beispiel leicht nachvollziehen, indem man bei $F(\alpha, \beta)$ zuerst die horizontalen Differenzen bildet und in ein Diagramm schreibt und anschliessend in diesem Diagramm die vertikalen Differenzen bildet.

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{d^2 F(\alpha, \beta)}{d\alpha d\beta} \quad (2)$$

Da die erhaltenen Werte nicht alle gleich gross sind, handelt es sich nicht um eine homogene

Gewichtsverteilung. Es fließen also nicht alle Hystereseoperatoren gleich stark in den Ausgang ein. Mit diesem Rüstzeug kann ein Piezoelement jetzt korrekt ausgemessen und die korrespondierende Gewichtsfunktion gefunden werden. Es können per Software auch lokale Maxima und Minima gespeichert werden, welche die "Treppenfunktion" des Ausgangs bestimmen.

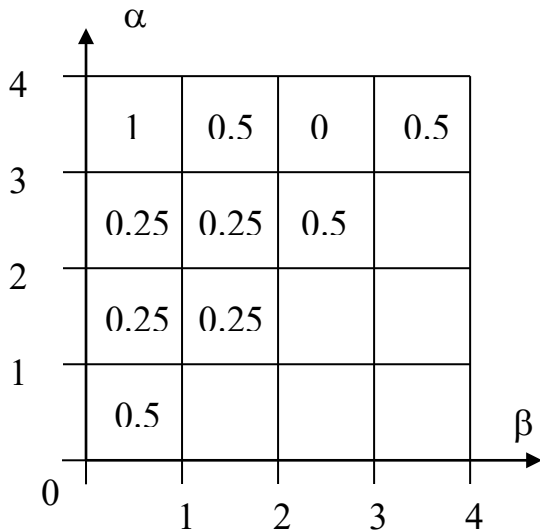


Fig. 8.: $\mu(\alpha, \beta)$

5. Implementation und Verifikation

Was noch fehlt, ist ein Weg, wie das graphisch Hergeleitete auf einfache Weise implementiert werden kann. Dazu wurden von [Mayergoz 91] einfache Formeln abgeleitet, welche von der Flächenfunktion $F(\alpha, \beta)$ ausgehen. Diese wurden für die Problemstellung „Multilayer-Piezoelement“ noch leicht angepasst (3).

$$f = \sum_{k=1}^{n-1} [F(M_k, m_k) - F(M_k, m_{k-1})] + [F(M_n, u) - F(M_n, m_{n-1})] \quad \text{ab} \quad (3)$$

$$f = \sum_{k=1}^{n-1} [F(M_k, m_k) - F(M_k, m_{k-1})] + [F(u, u) - F(u, m_{n-1})] \quad \text{auf}$$

Als Ergänzung zu diesen Formeln muss jetzt ein Programm implementiert werden, welches die lokalen Minima und Maxima zur richtigen Zeit speichert und löscht.

Es bleibt zu zeigen, dass die Simulation und die Messung übereinstimmen. Dazu wurden insgesamt 55 Messwerte aus Fig. 1 abgespeichert. Vom größten Loop wurden also 10 Messwerte

gespeichert, vom zweitgrößten 9, usw., vom kleinsten schließlich wurde nur noch ein Messwert gespeichert. 55 Messwerte erscheint recht wenig, umso bemerkenswerter sind die damit erzielten Resultate. Fig. 10 zeigt die simulierte Hysteresekurve, welche sich aus dem Eingangsspannungsverlauf aus Fig. 9 ergibt. Da es sich um eine abklingende Sinusschwingung handelt, werden lokale Minima und Maxima gespeichert. Die Abweichung zum realen Multilayer-Piezoelement beträgt in jedem Fall weniger als 400nm, was etwa 2.5% des Maximalwertes von 16µm entspricht.

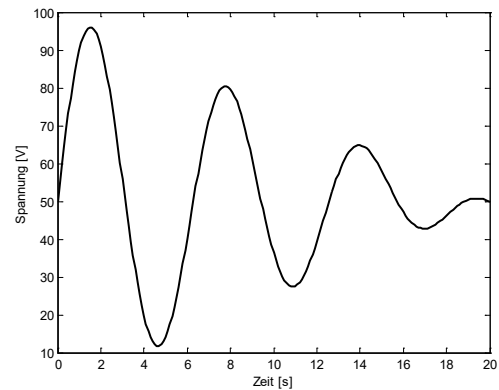


Fig. 9.: $u(t)$

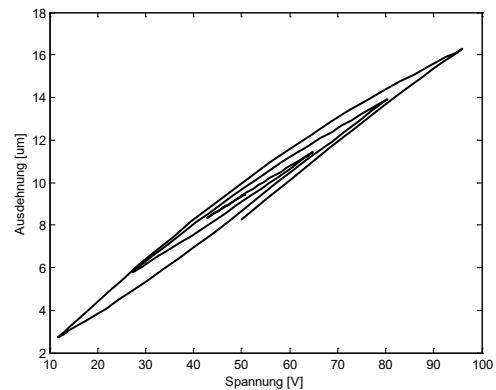


Fig. 10.: Simulierter Verlauf

6. Diskussion

Es zeigt sich, dass bereits mit sehr wenigen Messwerten brauchbare Resultate erzielt werden können. Diese Methode lässt sich sehr gut in den Aktuatoren vorgeschalteten (Signal)prozessoren implementieren. Man muss sich jedoch bewusst sein, dass die Speicherung von lokalen Maxima und Minima sehr schnell zu Überläufen führen kann. Das obige Beispiel des abklingenden Sinus ist der schlechteste Fall; ohne dass jemals Maxima und Minima gelöscht würden, werden immer mehr ebensolche erzeugt. Diesem Umstand muss mit geeigneten Abbruchkriterien Rechnung getragen werden.

7. MATLAB - Files

Damit der Leser das obige Beispiel selber anwenden kann, werden die (relativ kurzen) Files an dieser Stelle dargestellt. Die Functions ‚smoothmatrix‘ und ‚hysteresis‘ werden separat abgespeichert.

```
%Hysterese
clear;
f = [0 2.38 4.46 6.4 8.29 10.09 11.69
13.18 14.53 15.74 16.90;
0 2.32 4.36 6.30 8.18 9.86 11.40 12.88
14.13 15.36 16.52;
0 2.17 4.23 6.10 7.86 9.49 10.99 12.36
13.68 14.91 0;
0 2.15 4.11 5.90 7.64 9.19 10.56 11.91
13.23 0 0;
0 2.03 3.97 5.74 7.34 8.71 10.11 11.46 0 0
0;
0 2.01 3.76 5.39 6.84 8.23 9.63 0 0 0 0;
0 1.92 3.54 5.05 6.41 7.8 0 0 0 0 0;
0 1.73 3.22 4.59 5.95 0 0 0 0 0 0;
0 1.62 2.94 4.31 0 0 0 0 0 0 0;
0 1.43 2.75 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 1.43 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

m(1)= 0.0001;
M(2)= 0.0001;
m(2)= 0.0001;
n = 2;
up = 1;
t = 0:0.1:20;
for k = 1:201
y (k) = 5 + 4.99*(1-t(k)/20)*sin(t(k));
end

k=1;
u = y(k);
for k = 1:201
uالت = u;
u = y(k);
if up == 1
if uالت > u
M(n+1) = uالت;
up = 0;
else
if (n>2) & (u>=M(n))
n=n-1;
end
end
else
if uالت < u
m(n+1) = uالت;
n=n+1;
up = 1;
else
if (n>2) & (u<=m(n))
n = n - 1;
end
end
end
end

out(k) = hysteresis(u, up, n, M, m, f);

end
plot(y, out);

function y = smoothmatrix(f, n, A, B)
b = B+1;
a = n-A; % richtige Numerierung

bi = fix(b); br = b-bi;
```

```
ai = fix(a); ar = a-ai; %Teilung in
Integer und Rest
```

```
r = f(ai, bi)+(f(ai, bi+1)-f(ai, bi))*br;
q = f(ai+1, bi)+(f(ai+1, bi+1)-
f(ai+1, bi))*br;
y = ar*q+(1-ar)*r;
```

```
function x = hysteresis(u, up, n, M, m, f);
if up == 1
x = 0;
for k = 1:n-1
x = x +
(smoothmatrix(f, 11, M(k+1), m(k+1)) -
smoothmatrix(f, 11, M(k+1), m(k)));
end
x = x + (smoothmatrix(f, 11, u, u) -
smoothmatrix(f, 11, u, m(n)));
else
x = 0;
for k = 1:n-1
x = x +
(smoothmatrix(f, 11, M(k+1), m(k+1)) -
smoothmatrix(f, 11, M(k+1), m(k)));
end
x = x + (smoothmatrix(f, 11, M(n+1), u) -
smoothmatrix(f, 11, M(n+1), m(n)));
end
```

8. Literature

Mayergoyz, Isaac. "Mathematical models of hysteresis." *IEEE Transactions on magnetics* 22.5 (1986): 603-608.

Jiles, David C., and David L. Atherton. "Theory of ferromagnetic hysteresis." *Journal of magnetism and magnetic materials* 61.1-2 (1986): 48-60.

Zesch, Wolfgang, Roland Siegwart, and Roland Büchi. "Inertial mechanisms for positioning microobjects: Two novel mechanisms." *SPIE Photonics East'95: Microrobotics and Micromachanical Systems Symposium, Philadelphia PA, USA, 1995*. Vol. 2593. SPIE, 1995.

Büchi, Roland. Modellierung und Regelung von Impact Drives für Positionierungen im Nanometerbereich. Diss. ETH Zurich, 1996.

Macki, Jack W., Paolo Nistri, and Pietro Zecca. "Mathematical models for hysteresis." *SIAM review* 35.1 (1993): 94-123.

Preisach, Ferenc. "Über die magnetische Nachwirkung." *Zeitschrift für physik* 94.5-6 (1935): 277-302.